

三次 ω -Bézier 曲线的形状分析*

吴晓勤¹⁺, 韩旭里²

¹(湖南科技大学 数学与计算科学学院, 湖南 湘潭 411201)

²(中南大学 数学科学与计算技术学院, 湖南 长沙 410083)

Shape Analysis of Cubic ω -Bézier Curve

WU Xiao-Qin¹⁺, HAN Xu-Li²

¹(School of Mathematics and Computation Science, Hu'nan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

²(School of Mathematical Science and Computing Technology, Central South University, Changsha 410083, China)

+ Corresponding author: E-mail: xqwu123@yahoo.com.cn, http://www.hnust.edu.cn

Wu XQ, Han XL. Shape analysis of cubic ω -Bézier curve. *Journal of Software*, 2010,21(Suppl.):60-66.
http://www.jos.org.cn/1000-9825/10007.htm

Abstract: To investigate effects of the frequency parameter on the curve shape, this paper analyzes the shape features of the cubic ω -Bézier curve by using the method based on the theory of envelope and topological mapping. Necessary and sufficient conditions are derived for this curve having one or two inflection points, a loop or a cusp, or be locally or globally convex. Those conditions are completely characterized by the vertex of the control polygon and frequency parameter. Furthermore, it discusses the influences of frequency parameter on the shape diagram and the ability for adjusting the shape of the curve.

Key words: ω -Bézier curve; frequency parameter; singular point; inflection point; local convexity; global convexity

摘要: 基于包络理论与拓扑映射的方法对三次 ω -Bézier 曲线进行了形状分析, 得出了曲线上含有奇点、拐点和曲线为局部凸或全局凸的充分必要条件. 这些条件完全由控制多边形的顶点和频率参数所决定. 进一步讨论了频率参数对形状分布图的影响及其对曲线形状的调节能力.

关键词: ω -Bézier 曲线; 频率参数; 奇点; 拐点; 局部凸; 全局凸

ω -Bézier^[1,2]曲线是对 C-Bézier^[3]曲线、H-Bézier^[4]曲线的进一步推广, 当频率参数 $\omega=0, 1, i$ 时, 分别对应为 Bézier 曲线、C-Bézier 曲线、H-Bézier 曲线. ω -Bézier 曲线不仅统一了 Bézier 曲线、C-Bézier 曲线和 H-Bézier 曲线, 而且继承了 Bézier 曲线的大多数重要性质, 如端点插值、凸包性、仿射不变性等, 还可直接表示圆弧、双曲线、螺旋线、摆线等常用的曲线.

在实际应用中, 往往需要判断参数曲线段上是否有奇点和拐点, 以及曲线为局部凸还是全局凸, 这对曲线的形状控制是至关重要的. Yang 和 Wang 用摆线的仿射变换方法, 讨论了三次 C-Bézier 曲线的奇点与拐点, 给出了该

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10871208 (国家自然科学基金); the Scientific Research Fund of Hu'nan Provincial Education Department of China under Grant No.08B027 (湖南省教育厅资助科研项目)

Received 2010-05-15; Accepted 2010-08-16

曲线的形状分布图^[5],还通过构造一种特征函数的方法得到了平面三次 H -Bézier 曲线的奇拐点分布^[6];其后叶正麟和吴荣军利用包络理论和拓扑映射的方法对平面三次 C -Bézier 曲线和平面三次 H -Bézier 曲线进行了形状分析^[7,8],也得出了曲线的形状分布图.Juhász 通过固定 3 个控制点,适当选择第 4 个控制点(主要是端点)的位置来产生并调控有理 Bézier 及 C -Bézier 曲线的奇点和拐点的方法^[9].

本文基于包络理论和拓扑映射的方法,对三次 ω -Bézier 曲线进行了形状分析,我们先讨论了空间曲线的变挠性,再对平面非退化曲线的奇点、拐点及凸性作了进一步讨论,揭示局部凸区域与重结点区域的两条边界线之间的包络关系,由此得出了平面三次 ω -Bézier 曲线的形状分布图,图中既包括奇、拐点分布区域,还给出了局部凸区域和全局凸区域.此形状分布图统一了文献[7,8]形状分布图.

1 三次 ω -Bézier 曲线简介

为了讨论方便,令区间长度为 1,即文献[2]中 $l=1$,按照文献[2]的递推公式,给出三次 ω -Bézier 曲线的定义.

定义 1. 设 $\omega \in \{\sqrt{\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \leq \pi^2\}$ 是一给定的频率参数, $P_i \in \mathbb{R}^d$ ($d=2,3, i=0,1,2,3$) 是 4 个控制顶点,对 $t \in [0,1]$,定义曲线

$$P(t) = \sum_{i=0}^3 P_i B_i(t) \tag{1}$$

为三次 ω -Bézier 曲线,其中三次 ω -Bézier 基函数 $B_i(t)$ 定义为

$$\begin{cases} B_0(t) = \frac{(1-t)\omega - \sin(\omega(1-t))}{\omega - \sin \omega} \\ B_1(t) = \frac{\sin(\omega/2)[\omega \cos(\omega(1-t)) - (1-t)\omega \cos \omega - \omega t]}{(\omega - \sin \omega)[\omega \cos(\omega/2) - 2\sin(\omega/2)]} + \\ \quad \frac{\sin(\omega/2)[\sin \omega - \sin(\omega t) - \sin(\omega(1-t))]}{(\omega - \sin \omega)[\omega \cos(\omega/2) - 2\sin(\omega/2)]} \\ B_2(t) = B_1(1-t) \\ B_3(t) = B_0(1-t) \end{cases} \tag{2}$$

注意:i) 当 $\alpha = 0$,即 $\omega = 0$ 时,通过求极限知,曲线(1)为三次 Bézier 曲线;ii) 当 $\alpha > 0$,即 ω 为一正实数,特别当 $\omega = 1$ 时,曲线(1)为三次 C -Bézier 曲线;iii) 当 $\alpha < 0$,即 ω 为一个纯虚数,特别当 $\omega = i$ 时,曲线(1)为三次 H -Bézier 曲线.

2 空间三次 ω -Bézier 曲线的形状分析

定理 1. 若 4 个控制顶点不共面,则曲线 $P(t)$ 为空间曲线且无奇点和泛拐点,并且曲线与其控制多边形的旋转方向相同.

证明:设 $q_i = P_i - P_{i-1}$ ($i=1,2,3$),将 $P(t)$ 改写为

$$P(t) = P_0 + [1 - B_0(t)]q_1 + [B_2(t) + B_3(t)]q_2 + B_3(t)q_3 \tag{3}$$

则有

$$P'(t) = -B'_0(t)q_1 + [B'_2(t) + B'_3(t)]q_2 + B'_3(t)q_3$$

由式(2)计算得,当 $0 < t < 1$ 时, $B'_2(t) + B'_3(t) = -\frac{2\omega \sin(\omega t/2) \sin(\omega(1-t)/2)}{\omega \cos(\omega/2) - 2\sin(\omega/2)} \neq 0$,又由控制顶点不共面可知,边向量

q_i ($i=1,2,3$) 线性无关,故 $P'(t) \neq 0$,即 $P(t)$ 不可能有尖点.

假设曲线 $P(t)$ 有重结点,设有 $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$,使得 $P(t_1) - P(t_2) = 0$,则有

$$[B_0(t_2) - B_0(t_1)]q_1 + [B_2(t_1) + B_3(t_1) - B_2(t_2) + B_3(t_2)]q_2 + [B_3(t_1) - B_3(t_2)]q_3 = 0 \tag{4}$$

因为 q_i ($i=1,2,3$) 线性无关,所以由式(4)得 $B_0(t_2) = B_0(t_1), B_2(t_1) = B_2(t_2), B_3(t_1) = B_3(t_2)$,但当 $\alpha \leq \pi^2$,易知 $B_3(t)$ 是严格单调的,故曲线 $P(t)$ 不可能有重结点.

泛拐点是指空间曲线上挠率变号的点.设 $g(t) = \det(p'(t), P''(t), P'''(t))$,则有

$$\begin{aligned}
g(t) &= \det \left[\sum_{i=0}^3 P_i B_i'(t) \sum_{i=0}^3 P_i B_i''(t) \sum_{i=0}^3 P_i B_i'''(t) \right] \\
&= \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^3 B_i(t) & \sum_{i=0}^3 B_i'(t) & \sum_{i=0}^3 B_i''(t) & \sum_{i=0}^3 B_i'''(t) \\ \sum_{i=0}^3 P_i B_i(t) & \sum_{i=0}^3 P_i B_i'(t) & \sum_{i=0}^3 P_i B_i''(t) & \sum_{i=0}^3 P_i B_i'''(t) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_0(t) & B_0'(t) & B_0''(t) & B_0'''(t) \\ B_1(t) & B_1'(t) & B_1''(t) & B_1'''(t) \\ B_2(t) & B_2'(t) & B_2''(t) & B_2'''(t) \\ B_3(t) & B_3'(t) & B_3''(t) & B_3'''(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ P_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_0(t) & B_0'(t) & B_0''(t) & B_0'''(t) \\ B_1(t) & B_1'(t) & B_1''(t) & B_1'''(t) \\ B_2(t) & B_2'(t) & B_2''(t) & B_2'''(t) \\ B_3(t) & B_3'(t) & B_3''(t) & B_3'''(t) \end{bmatrix} \end{vmatrix} \\
&= (q_1, q_2, q_3) D(t).
\end{aligned}$$

其中, (q_1, q_2, q_3) 为边向量 q_1, q_2, q_3 的混合积, $D(t) = -\frac{2\omega^6 \sin^3(\omega/2)}{(\omega \cos(\omega/2) - 2\sin(\omega/2))(\omega - \sin \omega)^2}$.

经计算可知, 当 $\alpha \leq \pi^2$ 时, $D(t) > 0$, 所以曲线 $P(t)$ 无拐点, 并且与其控制多边形具有相同的旋转方向. \square

3 平面三次 ω -Bézier 曲线的形状分析

如果 P_0, P_1, P_2, P_3 四点共面, $P(t)$ 为平面曲线, 此时 $(q_1, q_2, q_3) = 0$.

先考虑 q_1 不平行 q_3 , 设 $q_2 = uq_1 + vq_3$, 将其代入式(3)得

$$P(t) = P_0 + [1 - B_0(t) + u(B_2(t) + B_3(t))]q_1 + [B_3(t) + v(B_2(t) + B_3(t))]q_3 \quad (5)$$

3.1 尖点

曲线 $P(t)$ 有尖点的必要条件是 $P'(t) = 0 (0 < t < 1)$. 由式(5)得

$$[-B_0'(t) + u(B_2'(t) + B_3'(t))]q_1 + [B_3'(t) + v(B_2'(t) + B_3'(t))]q_3 = 0 \quad (6)$$

由于 q_1 与 q_3 线性无关, 据式(6)得参数曲线

$$C: \begin{cases} u = \frac{\csc(\omega t/2)(\omega \cos(\omega/2) - 2\sin(\omega/2))\sin(\omega(1-t)/2)}{\omega - \sin \omega} \\ v = \frac{\csc(\omega(1-t)/2)(\omega \cos(\omega/2) - 2\sin(\omega/2))\sin(\omega t/2)}{\omega - \sin \omega} \end{cases}, \quad 0 < t < 1 \quad (7)$$

考察曲线 C 单调性和凹凸性. 对曲线 C 求一阶导数 $\frac{dv}{du} = -\csc^2(\omega(1-t)/2)\sin^2(\omega t/2)$, 再求二阶导数

$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{2\csc^3(\omega(1-t)/2)(\omega - \sin \omega)\sin^3(\omega t/2)}{\omega \cos(\omega/2) - 2\sin(\omega/2)}$, 可知当 $\alpha \leq \pi^2$, 一阶导数和二阶导数都小于 0, 从而曲线 C 是单调递减的凸曲线.

在曲线 C 上任取一点, 记为 (u_0, v_0) , 与之对应的参数值设为 $t_0 (0 < t_0 < 1)$. 由 $P(t)$ 的泰勒展开

$P(t) = P(t_0) + P'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}P''(t_0)(t - t_0)^2 + o(t - t_0)^2$, 求得

$$P'(t) = P''(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0) \quad (8)$$

式(8)中 $P''(t_0) \neq 0$, 若不然, 对式(6)再求一次导, 有

$$[-B_0''(t) + u(B_2''(t) + B_3''(t))]q_1 + [B_3''(t) + v(B_2''(t) + B_3''(t))]q_3 = 0 \quad (9)$$

据式(9)又可得与式(7)类似的参数方程, 而当 $\alpha \leq \pi^2$, 此两参数方程无交点. 故 $P'(t)$ 经过 t_0 时方向反变, 所以曲线

C 是尖点条件曲线.

3.2 拐点

曲线 $P(t)$ 的副法向量为 $P'(t) \times P''(t)$, 经计算有

$$P'(t) \times P''(t) = f(t; u, v)(q_1 \times q_2) \tag{10}$$

其中,

$$f(t; u, v) = -\det \begin{pmatrix} B'_0(t) & B'_3(t) \\ B''_0(t) & B''_3(t) \end{pmatrix} + u \det \begin{pmatrix} B'_2(t) & B'_3(t) \\ B''_2(t) & B''_3(t) \end{pmatrix} + v \det \begin{pmatrix} B'_0(t) & B'_1(t) \\ B''_0(t) & B''_1(t) \end{pmatrix} \tag{11}$$

点 $P(t_0)(0 < t_0 < 1)$ 是拐点当且仅当 $f(t; u, v)$ 经过 t_0 时变号. 而在 uv -平面, 使得 $P(t)$ 有拐点的可能区域必为直线族 $f(t; u, v) = 0$ 所覆盖, 求此直线族的包络 $\begin{cases} f(t; u, v) = 0 \\ f'(t; u, v) = 0 \end{cases}$, 得到与 C 曲线相同的参数曲线, 说明直线族的包络正好是曲线 C .

C 的切线所扫过的区域为 $S \cup D$ (除出 C 本身), 如图 1 所示, 此即为所求的可能拐点区域. D 区域是由由曲线 C 两条渐近线 $u=0, v=0$ 和曲线 C (不含 C) 所围部分; S 区域为 uv -平面的第二、四象限.

当 $(u_0, v_0) \in S \cup D$ 时, 设过点 (u_0, v_0) 与曲线 C 相切的直线之一为 $f(t_0; u, v) = 0$, 其中, t_0 为切点对应的参数, 则由 $f(t; u_0, v_0) = f'_t(t_0; u_0, v_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$ 可知, $f'_t(t_0; u_0, v_0) \neq 0$ (因为若 $f'_t(t_0; u_0, v_0) = 0$, 则由包络定义可知, $(u_0, v_0) \in C$), 从而 $f(t; u_0, v_0)$ 经过 t_0 时变号, 故 $P(t_0)$ 是拐点. 进一步地, 当 $(u_0, v_0) \in S$ 时, 过此点只能作曲线 C 的一条切线, 对应 $P(t)$ 只有 1 个拐点, 称 S 为单拐点区域; 当 $(u_0, v_0) \in D$ 时, 过此点可作曲线 C 的两条切线, 对应 $P(t)$ 有 2 个拐点, 称 D 为双拐点区域.

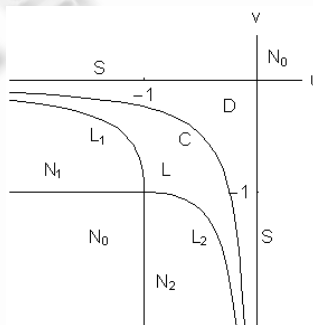


Fig.1 Shape diagram of cubic ω -Bézier curve ($\omega=i$)
图 1 三次 ω -Bézier 曲线的形状图($\omega=i$)

3.3 重结点

曲线 $P(t)$ 有重结点, 当且仅当存在 $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, 使得 $P(t_1) = P(t_2)$, 这等价于 u, v, t_1, t_2 满足方程组

$$\begin{cases} u = \frac{B_0(t_2) - B_0(t_1)}{B_2(t_2) + B_3(t_2) - B_2(t_1) - B_3(t_1)} \\ v = \frac{B_3(t_1) - B_3(t_2)}{B_2(t_2) + B_3(t_2) - B_2(t_1) - B_3(t_1)} \end{cases}, (t_1, t_2) \in \Delta \tag{12}$$

其中 $\Delta = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq t_1 < t_2 \leq 1\}$.

容易验证, 式(12)定义了一个拓扑映射 $F: \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow F(\Delta) \subset \mathbb{R}^2$, 因此象域 $L = F(\Delta)$ 是 uv -平面上单连通区域, 象域 L 的 3 条边界线与定义域 Δ 的 3 条边界线 $t_1 = t_2$, $t_1 = 0$ 和 $t_2 = 1$ 相对应, 即分别为曲线 C (不属于 L), L_1 和 L_2 (都属于 L). L 中点 (u_0, v_0) 所对应曲线 $P(t)$ 有且仅有一个二重结点, 其中 L_1 和 L_2 的参数方程分别为

$$L_1: \begin{cases} u = \frac{[\omega \cos(\omega/2) - 2 \sin(\omega/2)][\omega t - \sin \omega + \sin(\omega - \omega t)]}{(\sin \omega - \omega)[\omega t \cos(\omega/2) - \sin(\omega/2) + \sin((\omega - 2\omega t)/2)]} \\ v = \frac{[\omega \cos(\omega/2) - 2 \sin(\omega/2)][-\omega t + \sin(\omega t)]}{(\omega - \sin \omega)[\omega t \cos(\omega/2) - \sin(\omega/2) + \sin((\omega - 2\omega t)/2)]} \end{cases} (0 < t \leq 1),$$

$$L_2: \begin{cases} u = \frac{(2\sin(\omega/2) - \omega\cos(\omega/2))[(t-1)\omega + \sin(\omega - \omega t)]}{(\omega - \sin\omega)[(t-1)\omega\cos(\omega/2) + \sin(\omega/2) + \sin((\omega - 2t\omega)/2)]} \\ v = \frac{(-2\sin(\omega/2) + \omega\cos(\omega/2))[(1-t)\omega - \sin\omega + \sin(\omega t)]}{(\omega - \sin\omega)[(t-1)\omega\cos(\omega/2) + \sin(\omega/2) + \sin((\omega - 2t\omega)/2)]} \end{cases} \quad (0 \leq t < 1).$$

易见,曲线 L_1 和 L_2 相交于点 $(-1,-1)$, L_1 以 $u=0$ 为渐近线, L_2 以 $v=0$ 为渐近线;而且曲线 L_1 和 L_2 是关于 $u=v$ 对称,因为将 L_1 的 u, v 分别用 $(1-t)$ 代换,得到 L_2 中的 v, u . 所以只需讨论曲线 L_1 和 L_2 中一条曲线的属性.

对曲线 L_1 分别求一阶导数 $\frac{dv}{du} = \frac{-2 + 2\cos(\omega t) + \omega t \sin(\omega t)}{1 + \cos\omega - \cos(\omega t) - \cos(\omega - \omega t) + \omega t \sin(\omega - \omega t)}$, 再求二阶导数 $\frac{d^2v}{du^2} = \frac{\csc^3[(\omega - \omega t)/2](\sin\omega - \omega)[\omega t - \sin(\omega t)][\omega t \cos(\omega/2) - \sin(\omega/2) + \sin((\omega - 2\omega t)/2)]^3}{4(\omega\cos(\omega/2) - 2\sin(\omega/2))[\omega t \cos((\omega - \omega t)/2) - 2\cos(\omega/2)\sin(\omega t/2)]^3}$. 经计算可知,当 $\alpha \leq \pi^2$, 上述导数小于 0;说明曲线 L_1 为严格凸单调递减的曲线,从而曲线 L_2 也为严格凸单调递减的曲线.

3.4 凸性

按照文献[10]对曲线凸性讨论可知,当 $(u, v) \in N = R^2 \setminus (C \cup S \cup D \cup L)$ 时,曲线 $P(t)$ 无尖点、重结点和拐点,并且此时 $P'(t) \times P''(t)$ 不发生方向改变.再考虑 $m(t) = P'(0) \times (P(t) - P(0))$, $n(t) = (P(t) - P(0)) \times P'(t)$, 由式(5)计算得

$$m(t) = \varphi(t; u, v)(q_1 \times q_3), \quad n(t) = \psi(t; u, v)(q_1 \times q_3)$$

其中,

$$\begin{aligned} \varphi(t; u, v) &= \frac{\omega - \omega \cos \omega}{\omega - \sin \omega} [B_3(t) + v(B_2(t) + B_3(t))] \\ \psi(t; u, v) &= (1 - B_0(t))B_3'(t) + B_3(t)B_0'(t) + u[B_2(t)B_3'(t) - B_3(t)B_2'(t)] + \\ &\quad v[(1 - B_0(t))(B_2'(t) + B_3'(t)) + B_0'(t)(B_2(t) + B_3(t))]. \end{aligned} \quad (13)$$

由式(13)可知,当 $v_0 = -\frac{B_3(t_0)}{B_2(t_0) + B_3(t_0)}$ 时, $m(t)$ 经过 t_0 时方向反变,易得 v_0 的取值范围为 $-1 < v_0 < 0$, 所以当

$(u, v) \in N_1$ 时(如图 1 所示, N_1 区域由 L_1 和射线 $u = -1(v \geq -1)$ 所围部分), $P(t)$ 为局部凸.

再由对称性可得,当 $(u, v) \in N_2$ 时,(如图 1 所示, N_2 与 N_1 关于直线 $u=v$ 对称的区域), $P(t)$ 也为局部凸.从而当 $(u, v) \in N_0 = N \setminus (N_1 \cup N_2)$ 时, $P(t)$ 为全局凸.

最后,当 $q_1 \parallel q_3$, 记 $q_3 = \mu q_1$, 以 q_1, q_2 为平面的基向量.据式(3),得

$$P(t) = P_0 + (1 - B_0(t) + \mu B_3(t))q_1 + (B_2(t) + B_3(t))q_2.$$

类似于第 3.1 节~第 3.3 节的讨论,可得:曲线 $P(t)$ 无尖点、二重点;当且仅当 $\mu > 0$ 即 q_1 与 q_3 方向相同(不包括 4 点共线)时, $P(t)$ 有且只有 1 个拐点.

定理 2. 当 $q_1 \parallel q_3$ 时,平面三次 ω -Bézier 曲线 $P(t)$ 无尖点、二重点;当且仅当 q_1 与 q_3 方向相同时, $P(t)$ 有且只有 1 个拐点.当 q_1 不平行 q_3 时,设 $q_2 = uq_1 + vq_3$, 则 $P(t)$ 的形状特征取决于点 (u, v) 在 uv -平面的如下分布(如图 1 所示),即

$$(u, v) \in \begin{cases} N_0(\text{含边界}\{(u, 0) | u \geq 0\} \cup \{(0, v) | v \geq 0\} \cup \\ \quad \{(u, -1) | u \leq -1\} \cup \{(-1, v) | v \leq -1\}): P(t) \text{为全局凸曲线,无奇点、拐点} \\ N_1 \cup N_2: P(t) \text{为局部凸曲线,无奇点、拐点} \\ S(\text{含边界}\{(u, 0) | u < 0\} \cup \{(0, v) | v < 0\}): P(t) \text{有一个拐点、无奇点} \\ D: P(t) \text{有 2 个拐点,无尖点和重结点} \\ C: P(t) \text{有一个尖点,无拐点和重结点} \\ L(\text{含边界}L_1 \text{和}L_2): P(t) \text{有一个重结点和拐点} \end{cases}.$$

4 频率参数对形状图的影响及其对曲线形状的调节

根据定理 2,我们讨论频率参数 ω 对曲线的形状影响.有以下结论:

结论 1. 如图 2 所示,当 ω 在允许范围内时,改变频率参数 ω 不影响单拐点区域 S 、全局凸区域 N_0 ,所以当 $P(t)$ 上仅有一个拐点时,不能通过调节频率参数消除它;而当 $P(t)$ 为全局凸时,无论如何修改频率参数,曲线仍为全局凸.

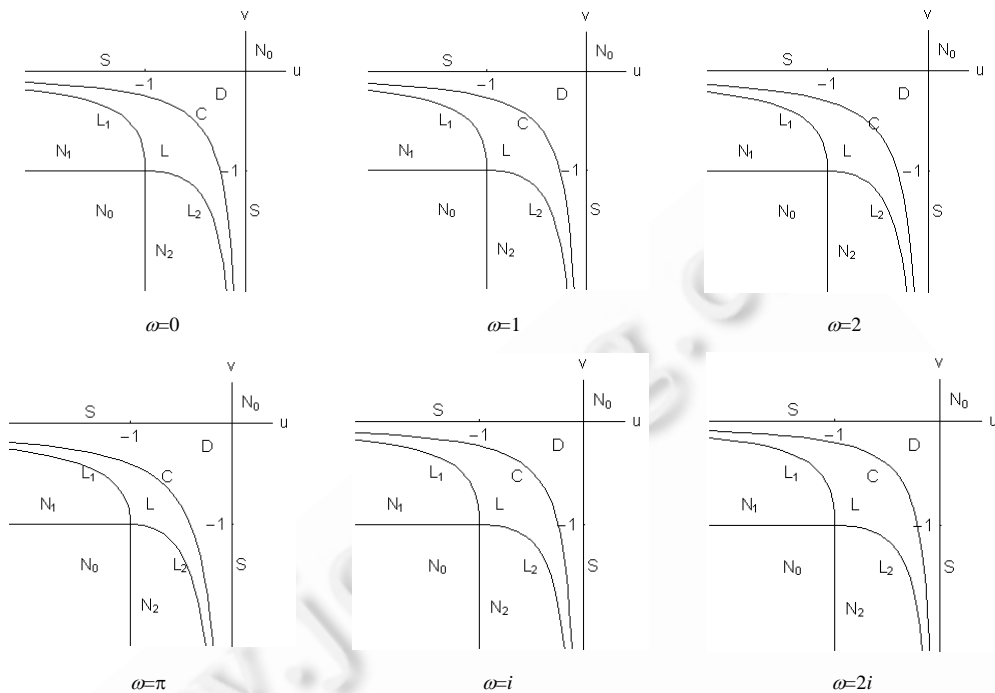


Fig.2 Changes of N_1, N_2, L, D and C with frequency parameter ω

图 2 频率参数 ω 对 N_1, N_2, L, D 和 C 的影响

结论 2. 当 $0 \leq \omega \leq \pi$ 时,频率参数 ω 越小,曲线 C 被朝向点 $(0,0)$ 方向拉伸, L_1 被朝向点 $(-1,0)$ 方向拉伸, L_2 被朝向点 $(0,-1)$ 方向拉伸,双拐点区域 D 缩小,重结点区域 L 相应扩大,局部凸区域 N_1 和 N_2 基本是不变的.当 ω 为纯虚数,其模越大,曲线 C 被朝向点 $(0,0)$ 方向拉伸, L_1 被朝向点 $(-1,0)$ 方向拉伸, L_2 被朝向点 $(0,-1)$ 方向拉伸,双拐点区域 D 缩小,重结点区域 L 相应扩大,局部凸区域 N_1 和 N_2 扩大.

结论 3. 当 $(u, v) \in \{(u, v) | -1 \leq u, v < 0\} \setminus \{(-1, -1)\}$, 即控制多边形首、末 2 条边相交(首末端点重合除外)时,在不同的频率参数下,曲线 $P(t)$ 可能出现奇点、或双拐点,修改频率参数不能使曲线为凸或是单拐点,如图 3 所示, $\omega = 0.1$ 是重结点曲线, $\omega = 2$ 是尖点曲线, $\omega = \pi$ 是双拐点曲线.

结论 4. 较强的局部保凸性,即当 $(u, v) \in \{(u, v) | u < -1, -1 < v\} \cup \{(u, v) | -1 < u, v < -1\}$, 即控制多边形为局部凸时,由结论 2 可知,曲线 $P(t)$ 为局部凸曲线,频率参数不影响曲线的局部凸性.图 4 给出了示例.

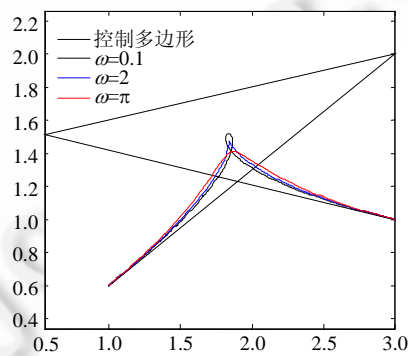


Fig.3 Curves having a loop, a cusp or two inflection points

图 3 出现重结点、尖点或双拐点的曲线

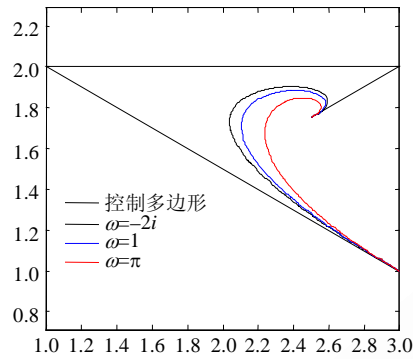


Fig.4 Locally convex curves

图 4 局部凸曲线

5 结束语

本文基于包络理论和拓扑映射方法,给出了 ω -Bézier 曲线的形状分布图,并讨论频率参数对形状图的影响及对曲线的调节能力.这些结论对 ω -Bézier 的实际应用具有一定的指导意义.

致谢 对审稿人提出的宝贵意见表示感谢.

References:

- [1] Fang ME, Wang GZ. ω B spline. Science in China (Series E), 2008,38(8):1179-1188 (in Chinese with English abstract).
- [2] Fang ME, Wang GZ. ω -Bézier. In: Proc. of 2007 the 10th IEEE Int'l Conf. on Computer Aided Design and Computer Graphics. 2007. 38-42.
- [3] Chen QY, Wang GZ. A class of Bézier-like curves. Computer Aided Geometric Design, 2003,20(3):29-39.
- [4] Li YJ, Wang GZ. Two kinds of B-basis of the algebraic hyperbolic space. Journal of Zhejiang University (Science A), 2005,6A(7): 750-759.
- [5] Yang QM, Wang GZ. Inflection points and singularities on C-curves. Computer Aided Geometric Design, 2004,21(2):207-213.
- [6] Wang GZ, Yang QM. Planar cubic hybrid hyperbolic polynomial curve and its shape classification. Progress in Natural Science, 2004,14(1):41-46.
- [7] Ye ZL, Wu RJ. Analysis of inflection and singular points on planar C-Bézier curve. Mathematic Numerica Sinica, 2005,27(1): 63-70 (in Chinese with English abstract).
- [8] Wu RJ. Shape of analysis of planar cubic H-Bézier curve. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2007,30(5):816-821 (in Chinese with English abstract).
- [9] Juhász I. On the singularity of a class of parametric curves. Computer Aided Geometric Design, 2006,23(2):146-156.
- [10] Liu CY. Theory and application of convex curves and surfaces in CAGD. Enschede: University of Twente, 2001.

附中文参考文献:

- [1] 方美娥,汪国昭. ω B 样条.中国科学(E 辑),2008,38(8):1179-1188.
- [7] 叶正麟,吴荣军.平面 C-Bézier 曲线的奇拐点分析.计算数学,2005,27(1):63-70.
- [8] 吴荣军.平面三次 H-Bézier 曲线的形状分析.应用数学学报,2007,30(5):816-821.



吴晓勤(1968-),男,湖南怀化人,博士,副教授,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学.



韩旭里(1957-),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为数值分析,计算机辅助几何设计,系统优化.