

一种稳定、高效且保持细节的粘性流模拟算法*

杨 猛^{1,2,3+}, 刘金刚^{1,2}

¹(中国科学院 计算技术研究所 智能信息处理重点实验室, 北京 100190)

²(首都师范大学 计算机科学联合研究院, 北京 100048)

³(中国科学院 研究生院, 北京 100049)

Stable, Efficient and Detail-Keeping Algorithm for Simulating Viscous Fluid

YANG Meng^{1,2,3+}, LIU Jin-Gang^{1,2}

¹(Key Laboratory of Intelligent Information Processing, Institute of Computing Technology, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

²(Join Faculty of Computer Scientific Research, Capital Normal University, Beijing 100048)

³(Graduate University, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

+ Corresponding author: E-mail: maxpane2@163.com

Yang M, Liu JG. Stable, efficient and detail-keeping algorithm for simulating viscous fluid. *Journal of Software*, 2011, 22(12): 2994-3003. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3976.htm>

Abstract: This paper presents a physically based simulation algorithm for animating viscous fluid. This algorithm introduces an equivalent energy model to couple diffusion processes and projection processes into a single linear system for solving together. This model implicitly solves the viscous term while simultaneously solving pressure to guarantee incompressibility of fluid. Furthermore it automatically captures the vital zero-traction boundary conditions, eliminating artifacts caused by directly approximating this boundary condition. Furthermore, this paper utilizes the physical information taken by particles to solve the advection term for battling numerical dissipation and constructs an implicit surface of fluid based on particles. Finally, the test results show the efficiency, accuracy and stability of the algorithm, and it can nicely simulate deformation characteristics of various viscous fluids, efficiently supporting variable viscosity.

Key words: viscous fluid; Navier-Stokes equation; couple; numerical dissipation; zero-traction condition; particle

摘 要: 给出一种基于物理的粘性流体模拟算法,该算法采用一种等价的能量模型将耗散过程与投影过程耦合入一个线性系统中同时求解,实现了在全隐式求解粘性项的同时求解压力来保证流体的不可压缩性,并且自动捕捉了至关重要的零应力边界条件,从而消除了由于直接近似该边界条件而导致的失真现象.此外,利用粒子携带的物理信息来求解对流项以抑制数值耗散.同时,基于粒子构建流体的隐式表面.最后的实验结果显示出算法的有效性、精确性及稳定性.该算法可以细致地体现各种粘度的流体的形变特征,并有效地支持可变粘性.

* 基金项目: 国家自然科学基金(60273019, 60373042, 60496326, 60573063, 60573064); 国家重点基础研究发展计划(973)(2003CB317008, G1999032701)

收稿时间: 2010-01-11; 修改时间: 2010-07-09; 定稿时间: 2010-12-15

关键词: 粘性流;纳维-斯托克斯方程;耦合;数值耗散;零应力条件;粒子
 中图法分类号: TP317 文献标识码: A

一直以来,流体模拟在与电影特效和视频游戏相关的工业中有重要的应用价值,也是计算机图形学中的研究热点和难点.国内外多数研究者都诉诸于基于物理的方法,通过数值求解流体的控制方程——纳维-斯托克斯方程(Navier-Stokes 方程,简称 N-S 方程)来体现贴近真实的流体运动,模拟流体的形变及其与不同介质的相互作用.流体模拟的对象包含很多分类,粘性流是其中的重要分支,如蜜糖、牙膏、乳酪、熔岩等.粘性是流体动能耗散快慢的度量,粘性越高,动能损失的速率越快,速度场的跳变被抹平的程度越强.

本文的主要贡献在于:针对在欧拉网格上难以建立粘性流零应力边界条件的问题,提出了一种与粘性形变中的能量损失相关的等价模型,该模型旨在将粘性项与压力项同时求解,于保证数值稳定性的同时维护了流体的不可压缩性,并且隐式捕捉了全部边界条件,尤其是对零应力边界条件的捕捉,使算法可以模拟非常丰富的流体形变,包括过去的绝大多数算法难以模拟或兼容的粘性卷曲、盘绕、滚动等现象,且能有效地支持可变粘性.

1 相关工作

在基于物理的流体模拟领域,国内外研究人员发表了大量的文献.Foster 等人^[1]首次用三维的 N-S 方程模拟流体的运动;而 Stam^[2]用半拉格朗日平流实现了对流项的无条件稳定求解;Enright 等人^[3]通过粒子水平集方法精确地追踪流体表面;Muller 等人^[4]用平滑粒子法模拟了水流的倾泻、飞溅等小规模细节;Losasso 等人^[5]使用了八叉树模型来适应性细化网格;Klingner 等人^[6]通过动态非结构化网格精确模拟了流-固耦合现象.周世哲等人^[7]提出了多重网格法来实时模拟流体,柳有权等人^[8]利用 GPU 实时模拟了中等规模的气流并在图像空间中实现了对复杂边界的有效处理.

如上所述,多数文献主要关注无粘流体的模拟.针对具有明显粘性的流体,Stam^[2]提出了用隐式方法来稳定求解粘性项,Goktekin 等人^[9]通过添加源项成功地模拟了流体的粘弹特性;Carlson 等人^[10]在离散粘性项时通过对称加权法实现了对可变粘性的支持;Rasmussen 等人^[11]引入了半隐式算法,该方法先对粘性应力张量中的非对称元素进行显示推进求解,再对剩下的对称元素构造 3 个独立的线性系统来隐式求解;Rafiee 等人^[12]和 Bonito 等人^[13]分别通过平滑粒子法和有限元方法来应对在规则网格上难以满足的粘性流自由边界条件.

2 流体控制方程及数值方法

不可压流体的 N-S 方程为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \tag{2}$$

\mathbf{U} 为速度场,其沿 x, y, z 坐标轴的 3 个分量分别为 u, v, w ; ρ 为密度; p 为压力; \mathbf{f} 为外力(重力、浮力、表面张力等)产生的加速度, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ 为梯度算子; $\boldsymbol{\tau}$ 为粘性应力张量,它是粘性系数 μ 及 $\nabla \mathbf{U}$ 的函数.

$$\boldsymbol{\tau} = \mu(\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T) \tag{3}$$

符号 T 表示矩阵的转置.方程(1)为动量方程,描述了流体的动量守恒;方程(2)为连续性方程,规定了流体的不可压缩性.标准的数值方法框架是用算子分割来求解方程(1),即首先忽略压力项,求解其他项,获得一个中间速度 \mathbf{U}^* :

$$\mathbf{U}^{old} = \mathbf{U}^n + \Delta t(-\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}^n + \mathbf{f}^n) \tag{4}$$

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^{old} + \Delta t \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^n / \rho \tag{5}$$

这里, n 作上标时表示第 n 个时间步.接着,结合方程(2)建立“投影”过程的线性系统,求解压力后再计算 \mathbf{U}^{n+1} :

$$\nabla \cdot \nabla p^{n+1} = \rho \frac{\nabla \cdot \mathbf{U}^*}{\Delta t} \Rightarrow U^{n+1} = \mathbf{U}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1} \tag{6}$$

公式(5)为求解粘性项(也称耗散项)的过程,对于粘性项,通常有3种离散化选择:

$$(1) \boldsymbol{\tau} = \mu(\nabla \mathbf{U}^{old} + (\nabla \mathbf{U}^{old})^T);$$

$$(2) \boldsymbol{\tau} = \mu(\nabla \mathbf{U}^* + (\nabla \mathbf{U}^{old})^T);$$

$$(3) \boldsymbol{\tau} = \mu(\nabla \mathbf{U}^* + (\nabla \mathbf{U}^*)^T).$$

离散模型1~离散模型3分别描述了显式、半隐式和全隐式的离散化思想.其中,全隐式模型的数值稳定性最高,而且脱离了时间步长的束缚.因此,本文的算法旨在以全隐式的形式来离散化和求解粘性项,同时精确处理难以在规则网格上满足的粘性边界条件,并且有效地支持可变粘性.

3 粘性流体的边界条件

流体要满足的首要边界条件为:流体不可进入非渗水型固体的内部.若固体界面的运动速度为 \mathbf{U}^{solid} ,单位法向量为 \mathbf{n}_1 ,则流体在固体边界处满足绕流条件(Neumann 边界条件).对于静止的固体,该条件进一步简化为

$$\mathbf{U}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{U}^{solid} \cdot \mathbf{n}_1 = 0 \quad (7)$$

对粘性流而言,还要满足另一个边界条件:在流体自由表面处的任意位置,周围空气对其施加的应力为0:

$$\mathbf{F}_{surface} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_2 = 0, \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}.$$

这里, $\boldsymbol{\sigma}$ 也称为柯西应力张量, \mathbf{I} 为单位矩阵, \mathbf{n}_2 在这里表示流体表面的单位法向量.按流体模拟领域的一般观点,可先忽略表面张力,认为自由界面处的压力为0(Dirichlet 边界条件),代入公式(3),因此,零应力条件蜕变为

$$\mu(\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T) \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \quad (8)$$

该边界约束对于强粘性流体至关重要,因为它控制了粘性流自由表面的形变.一些常见的现象,例如柱状胶水坠落在地面上,由于液体重力和地面支持力的双重作用,胶水会发生弯曲和盘绕的现象.然而,产生这种形变的根源并非守恒律,而是由公式(8)描述的零应力条件.该条件可认为是空气与流体的两相流耦合作用.

一般情况下,隐式模型需要将公式(8)描述的边界条件作为 Neumann 边界约束植入公式(5)的线性系统里求解.但在过去的相关工作中,极少有能在规则网格上较为精确地满足这种边界约束的实例,其困难之处主要体现在:(1) 显式离散 $\boldsymbol{\tau}$ 会使3个速度分量紧密耦合,此时的求解难度极大;(2) 在粘性可变的情况下,显式离散会使线性系统失去对称性,导致算法的时空复杂度剧增;(3) 在规则网格上估算法线,累积的数值误差会在之后的求解步中进一步扩大.有些文献通过进一步简化边界条件(8)来求解,如 Rasmussen 等人^[11]将该条件简化为 $\nabla \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}_2$.但在实际的模拟中,这种边界条件会直接破坏粘性流体的旋转运动,但本文的算法可以避免这种失真现象的出现.

综上,在规则网格上满足零应力约束(8)的局限性很大,因此本文设计了一种等价模型对其进行隐式处理.

4 等价能量模型及其求解

4.1 能量项及耗散与投影的耦合

本文的算法借助了计算流体力学(computational fluid dynamics,简称 CFD)领域常用的能量守恒方程:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{U}^2 \right) = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{r} : \nabla \mathbf{U} - \nabla \cdot \mathbf{H}.$$

这里, e 为内能, \mathbf{H} 为热流量, $\mathbf{U} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{r})$ 表示应力所做的功, $\mathbf{r} : \nabla \mathbf{U}$ 表示形变时粘性力所做的功.本文定义向量算子 \mathbf{E} :

$$\mathbf{E}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T) \quad (9)$$

则 \mathbf{r} 及 $\mathbf{r} : \nabla \mathbf{U}$ 可以表示为

$$\mathbf{r} = 2\mu \mathbf{E}(\mathbf{U}) - p\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{r} : \nabla \mathbf{U} = 2\mu \mathbf{E}(\mathbf{U}) : \mathbf{E}(\mathbf{U}) = 2\mu \|\mathbf{E}(\mathbf{U})\|_{\text{Frobenius}}^2.$$

这里,算子“:”表示矩阵的双内积运算(即 Frobenius 范数的平方).本文的算法便是借助于能量项 $\mathbf{r} : \nabla \mathbf{U}$ 来隐式捕捉零应力条件(8).进而,为了使最终的速度场 \mathbf{U}^{n+1} 在满足条件(8)的同时满足质量守恒条件(2)与绕流条件(7),本文不再用算子分割的思想来求解耗散过程(5)与投影过程(6),而是将这两个过程同时求解,则公式(5)与公式(6)的耦合形式为

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^{old} + \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \cdot \mu (\nabla \mathbf{U}^{n+1} + (\nabla \mathbf{U}^{n+1})^T) - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \quad (10)$$

根据公式(10)和公式(9),可以得到:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \quad (11)$$

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^{old} + \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \cdot 2\mu E \left(\mathbf{U}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right) \quad (12)$$

4.2 等价模型及等价性证明

定义算符 $\|\cdot\|$ 为求向量的模,则本文设计的等价模型如下:

$$extreme_{(\mathbf{U}^*, p)} \iint_{fluid} \rho \|\mathbf{U}^* - \mathbf{U}^{old}\|^2 - \iint_{fluid} \rho \left\| \mathbf{U}^{old} - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right\|^2 + 2\Delta t \iint_{fluid} \mu \left\| E \left(\mathbf{U}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right) \right\|_{Frobenius}^2 \quad (13)$$

式(13)的含义即求 $n+1$ 时刻的泛函数 \mathbf{U}^* 与 P ,使公式(13)的 3 个积分式的和取极值或达到驻点.

证明:对该和式求极值,相当于直接求解方程(10),并满足公式(7)与公式(8)描述的边界条件.

根据变分法的思想,引入二元标量函数 $f(x,y)$:

$$f(x,y) = \iint_{fluid} \rho \|\mathbf{U}^* - \mathbf{U}^{old} + x\mathbf{q}_1\|^2 - \iint_{fluid} \rho \left\| \mathbf{U}^{old} - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p - y \frac{\Delta t}{\rho} \nabla q_2 \right\|^2 + 2\Delta t \iint_{fluid} \mu \left\| E \left(\mathbf{U}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p + x\mathbf{q}_1 - y \frac{\Delta t}{\rho} \nabla q_2 \right) \right\|_{Frobenius}^2$$

这里,向量函数 \mathbf{q}_1 为任意向量场,标量函数 q_2 为在自由界面处为 0 的标量场(与压力 p 性质相同).当公式(13)取极值时,相当于 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点也取到极值.因此,根据驻点的条件, $f(x,y)$ 对 x 的偏导数在 $x=0$ 时值为 0,可以得到:

$$\iint_{fluid} \mathbf{q}_1^T \rho (\mathbf{U}^* - \mathbf{U}^{old}) + 2\Delta t \iint_{fluid} \mu E \left(\mathbf{U}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right) : E(\mathbf{q}_1) = 0 \quad (14)$$

注意:对于对称矩阵而言,算子“:”满足交换律与分配律.因为算子 E 总是产生对称矩阵,所以对定义在 Ω 上的任意两个可微分的向量函数 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} ,结合散度定理(体积分到面积分的转化),可得到如下重要性质:

$$\iint_{\Omega} E(\mathbf{B}) : E(\mathbf{A}) = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{B}^T E(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} - \iint_{\Omega} \mathbf{B}^T \nabla \cdot E(\mathbf{A}) \quad (15)$$

将性质(15)应用到公式(14)左手边第 2 个积分项上,便可以消去“:”算子,有

$$\iint_{fluid} \mathbf{q}_1^T \rho (\mathbf{U}^* - \mathbf{U}^{old}) + 2\Delta t \left[-\iint_{fluid} \mathbf{q}_1^T \nabla \cdot \mu E \left(\mathbf{U}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right) + \iint_{surface} \mathbf{q}_1^T \mu E \left(\mathbf{U}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right) \cdot \mathbf{n}_2 \right] = 0 \quad (16)$$

由于向量 \mathbf{q}_1 是任意的,若要保证上式恒成立,则在公式(16)的所有体积分式中,与 \mathbf{q}_1 相乘的因式之和必为 0,得到:

$$\rho (\mathbf{U}^* - \mathbf{U}^{old}) - 2\Delta t \nabla \cdot \mu E \left(\mathbf{U}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right) = 0 \Rightarrow \mathbf{U}^* = \mathbf{U}^{old} + \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \cdot 2\mu E \left(\mathbf{U}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right).$$

因此,上式便是公式(12)所描述的耗散与投影的耦合形式.

再看公式(16)中的面积分式.同理,被积函数也应该为 0,再结合公式(11)得到:

$$\mu E \left(\mathbf{U}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right) \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \Rightarrow \mu (\nabla \mathbf{U}^{n+1} + (\nabla \mathbf{U}^{n+1})^T) \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \quad (17)$$

所以,公式(17)表明,公式(8)所描述的边界条件成立.

同理, $f(x,y)$ 对 y 的偏导数在 $y=0$ 时也为 0,得到:

$$\iint_{fluid} \rho \nabla q_2^T \left(\mathbf{U}^{old} - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right) - 2\Delta t \iint_{fluid} \mu E \left(\mathbf{U}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right) : E(\nabla q_2) = 0.$$

对第 1 个积分式应用散度定理展开,对第 2 个积分式应用性质(15),得到:

$$\iint_{Surface} \rho q_2^T \left(\mathbf{U}^{old} - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right) \cdot \mathbf{n}_2 - \iiint_{fluid} \rho q_2^T \nabla \cdot \left(\mathbf{U}^{old} - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right) + 2\Delta t \iiint_{fluid} \nabla q_2^T \cdot \left(\nabla \cdot \mu E \left(\mathbf{U}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right) \right) - 2\Delta t \iint_{surface} \nabla q_2^T \mu E \left(\mathbf{U}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right) \cdot \mathbf{n}_2 = 0.$$

注意, q_2 在自由界面处为 0, 所以上式第 1 个面积分项中只剩下在固体边界的面积分, 接着代入公式(17), 消去上式的第 4 个积分项, 然后再次应用散度定理展开第 3 个积分项, 得到:

$$\iint_{Solid} q_2^T \left[\rho \left(\mathbf{U}^{old} - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right) + 2\Delta t \nabla \cdot \mu E \left(\mathbf{U}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right) \right] \cdot \mathbf{n}_1 - \iiint_{fluid} q_2^T \nabla \cdot \left[\rho \left(\mathbf{U}^{old} - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right) + 2\Delta t \nabla \cdot \mu E \left(\mathbf{U}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right) \right] = 0.$$

类似地, 由于 q_2 在流体的内部是任意的, 上式体积分和面积分的被积函数恒为 0, 再结合公式(11)、公式(12), 可以得到:

$$\nabla \cdot \left[\mathbf{U}^{old} - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p + \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \cdot 2\mu E \left(\mathbf{U}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right) \right] = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{U}^{n+1} = 0 \quad (18)$$

$$\left[\mathbf{U}^{old} - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p + \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \cdot 2\mu E \left(\mathbf{U}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right) \right] \cdot \mathbf{n}_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{U}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_1 = 0 \quad (19)$$

公式(18)证明流体的不可压缩条件成立, 而公式(19)则证明了公式(7)所描述的任意静态固体边界处的绕流条件成立. 对运动的固体, 仅须计算每个与固体边界相交的网格单元中 \mathbf{U}^{old} 通过固体界面的流量 F , 然后将之后第 4.4 节描述的线性系统的右边向量的相应位置处加上 F 即可.

综上, 求解公式(13)等价于求解公式(10)所示的偏微分方程; 并在保证流体不可压缩性的同时, 自动满足了自由界面处的零应力条件及任意静态固体边界处的绕流条件. 至于与动态固体边界的耦合, 已经不是本文的研究重点.

4.3 离散化策略

设网格间距为 Δx , 为了在规则网格上离散公式(13)中的体积分式, 本文定义了离散的体积微元 $V_{x,y,z}$: 在以三维坐标 (x,y,z) 为中心、边长为 Δx 且各边沿网格方向的立方体中, $V_{x,y,z}$ 表示包含在该“参考立方体”中的流体体积. 一个快速计算 $V_{x,y,z}$ 的方法就是将参考立方体看成 2×2 或 3×3 的网格, 然后在每个网格单元的 8 个顶点处计算 (可以通过插值来估算) 到自由界面及固体边界的距离, 进而根据这些有向距离的比值估算流体的体积比重. 如图 1 所示. 若要提高精度, 可以考虑样条插值配合高斯积分的计算方法. 在离散公式(13)时, 积分式中的所有偏导数项均采用标准中央差分来离散化. 为简明起见, 这里本文将压力项简写为 $P^* = (\Delta t / \rho) P$, 则公式(13)的前两个体积分项的离散式为

$$\begin{aligned} & \rho \sum_{i,j,k} \left\{ V_{i-1/2,j,k} \left[(u_{i-1/2,j,k}^* - u_{i-1/2,j,k}^{old})^2 - \left(u_{i-1/2,j,k}^{old} - \frac{P_{i,j,k}^* - P_{i-1,j,k}^*}{\Delta x} \right)^2 \right] + \right. \\ & V_{i,j-1/2,k} \left[(v_{i,j-1/2,k}^* - v_{i,j-1/2,k}^{old})^2 - \left(v_{i,j-1/2,k}^{old} - \frac{P_{i,j,k}^* - P_{i,j-1,k}^*}{\Delta x} \right)^2 \right] + \\ & \left. V_{i,j,k-1/2} \left[(w_{i,j,k-1/2}^* - w_{i,j,k-1/2}^{old})^2 - \left(w_{i,j,k-1/2}^{old} - \frac{P_{i,j,k}^* - P_{i,j,k-1}^*}{\Delta x} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

公式(13)中的第 3 个积分项的离散较为复杂, 但原理完全相同, 只是这里的 V 值是根据以 τ 各分量的采样点 (如图 2 所示) 为中心的参考立方体来计算. 此外, 本文在单元顶点处存储 μ , 其他位置的 μ 值可通过其周围顶点处的 μ 取平均值求得. 类似地, 为简明起见, 设 $\mu^* = \Delta t \cdot \mu$, 且将第 3 个积分项的被积函数改写为 $2\mu^* \cdot E(\mathbf{U}^{n+1}) : E(\mathbf{U}^{n+1})$, 则该积分项的离散式为

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j,k} \left\{ 2(V\mu^*)_{i,j,k} \left[\left(\frac{u_{i+1/2,j,k}^{n+1} - u_{i-1/2,j,k}^{n+1}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{v_{i,j+1/2,k}^{n+1} - v_{i,j-1/2,k}^{n+1}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{w_{i,j,k+1/2}^{n+1} - w_{i,j,k-1/2}^{n+1}}{\Delta x} \right)^2 \right] + \right. \\
 & (V\mu^*)_{i-1/2,j-1/2,k} \left(\frac{u_{i-1/2,j,k}^{n+1} - u_{i-1/2,j-1,k}^{n+1} + v_{i,j-1/2,k}^{n+1} - v_{i-1,j-1/2,k}^{n+1}}{\Delta x} \right)^2 + \\
 & (V\mu^*)_{i-1/2,j,k-1/2} \left(\frac{u_{i-1/2,j,k}^{n+1} - u_{i-1/2,j,k-1}^{n+1} + w_{i,j,k-1/2}^{n+1} - w_{i-1,j,k-1/2}^{n+1}}{\Delta x} \right)^2 + \\
 & \left. (V\mu^*)_{i,j-1/2,k-1/2} \left(\frac{w_{i,j,k-1/2}^{n+1} - w_{i,j-1,k-1/2}^{n+1} + v_{i,j-1/2,k}^{n+1} - v_{i,j-1/2,k-1}^{n+1}}{\Delta x} \right)^2 \right\} \tag{21}
 \end{aligned}$$

注意,从算子 E 的定义可看出, $E(\mathbf{A}+\mathbf{B})=E(\mathbf{A})+E(\mathbf{B})$ 且 $E(\mathbf{A}+\mathbf{B}):E(\mathbf{A}+\mathbf{B})=E(\mathbf{A}):E(\mathbf{A})+2E(\mathbf{A}):E(\mathbf{B})+E(\mathbf{B}):E(\mathbf{B})$. 以此为依据将 $\mathbf{U}^{n+1}=\mathbf{U}^*-\nabla P^*$ 代入到公式(21)中并展开,将结果与公式(20)合并,便得到最终的离散式,记为 M . 在 M 中,会出现关于压力 P 的二阶导数. 参考图 3 的 2D 模板,二阶导数的差分方法为:

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_{i,j} = (P_{i+1,j} - 2P_{i,j} + P_{i-1,j}) / \Delta x^2, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right)_{i-1/2,j-1/2} = (P_{i,j} - P_{i-1,j} - P_{i,j-1} + P_{i-1,j-1}) / \Delta x^2.$$

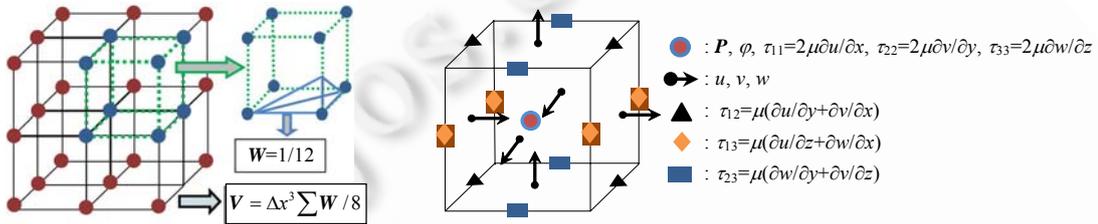


Fig.1 Example of computing volume weights Fig.2 Configuration for locations of various sample points
图 1 体积权值计算示例 图 2 各种采样点的位置配置

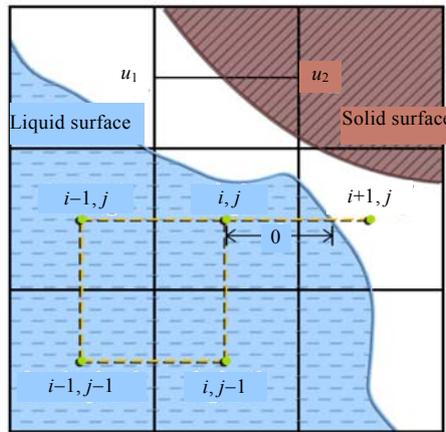


Fig.3 2D illustration of difference stencil and Dirichlet boundary conditions
图 3 差分模板及 Dirichlet 边界条件的 2D 图示

4.4 线性系统分析及求解

离散式 M 是关于所有 u,v,w 及 P 的多元二次函数. 根据极值的必要条件,用 M 对每个自变量求偏导数,并使其为 0,这样便会形成一个驻点方程,而所有的驻点方程会形成一个线性系统. 每一行的对角线元素为驻点方程

中被求导变量的系数,而非零的非对角线元素是与该变量产生耦合关系的相应变量的系数.如果用块矩阵的形式来描述,则线性系统可表示为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_p & \mathbf{A}_{pU} \\ \mathbf{A}_{pU}^T & \mathbf{A}_U \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{U}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}\mathbf{V}_U \mathbf{U}^{old} \\ \mathbf{V}_U \mathbf{U}^{old} \end{bmatrix} \quad (22)$$

在线性系统(22)中,矩阵 \mathbf{A}_p 代表所有未知压力的耦合关系,这是一个对称的不定矩阵;矩阵 \mathbf{A}_U 代表所有未知速度分量之间的耦合关系,是对称正定的矩阵;矩阵 \mathbf{A}_{pU} 代表速度分量与压力之间的耦合关.解向量 $[\mathbf{p}, \mathbf{U}^*]^T$ 由所有未知的压力与速度分量组成;右边的 \mathbf{D} 表示中央差分离散的散度算子矩阵; \mathbf{V}_U 是一个对角矩阵,每一行的对角线元素表示以相应的速度分量为中心的参考立方体中流体的体积比重.注意:将每一个驻点的方程的两边同时除以 Δx^3 后,体积微元 V 便可认为是参考立方体中流体的体积比重.

直接求解系统(22)比较低效,然而由于 \mathbf{A}_U 是正定矩阵,它必然可逆,因此可以利用高斯块消去方法消去速度 \mathbf{U}^* ,即将系统(22)的第 2 行两边同时左乘 $\mathbf{A}_{pU}(\mathbf{A}_U)^{-1}$ 后再与第一行相减,便得到关于 \mathbf{p} 的线性系统:

$$(\mathbf{A}_{pU} \mathbf{A}_U^{-1} \mathbf{A}_{pU}^T - \mathbf{A}_p) \mathbf{p} = \mathbf{A}_{pU} \mathbf{A}_U^{-1} \mathbf{V}_U \mathbf{U}^{old} - \mathbf{D}\mathbf{V}_U \mathbf{U}^{old} \quad (23)$$

线性系统(23)的系数矩阵是对称不定矩阵,这种类型的系统可以使用最小化残差算法(minimum residuals, 简称MINRES)^[14,15]来高效地求解.得到压力场 \mathbf{p} 的解后,将其回代入线性系统(22)中,由于 \mathbf{A}_{pU}^T 是个非常稀疏的矩阵,回代的计算量很小,所以将 \mathbf{p} 代入到系统(22)的第 2 行中,得到关于 \mathbf{U}^* 的线性系统:

$$\mathbf{A}_U \mathbf{U}^* = \mathbf{V}_U \mathbf{U}^{old} - \mathbf{A}_{pU}^T \mathbf{p} \quad (24)$$

线性系统(24)是对称正定的系统,因此可以利用带预估解的共轭梯度算法(preconditioned conjugate gradient,简称PCG)来高效求解得到 \mathbf{U}^* .最后,根据公式(11),利用 \mathbf{U}^* 减去 \mathbf{p} 的梯度(带因子 $\Delta t/\rho$),得到最终的速度场 \mathbf{U}^{n+1} .

4.5 Dirichlet边界条件的处理

在等价模型中, P 在固体边界上满足 Neumann 边界条件,而在自由界面处满足 Dirichlet 条件;相反, \mathbf{U}^* 在自由界面处满足 Neumann 条件,在固体边界处满足 Dirichlet 条件.本算法在固体边界处对 \mathbf{U}^* 应用粘性流无滑移条件,如图 2 所示,将固体边界内部的“幽灵”速度值(即 \mathbf{u}_2)设为固体本身的速度(对静态固体可直接设为 $\mathbf{0}$).对于位于空气域中的幽灵压力值,如图 2 中的 $P_{i+1,j}$,本算法利用线性插值法在离散压力的梯度时消去 $P_{i+1,j}$ 达到二阶精度的离散.由于本文用水平集(level set)方法定义流体的有向距离场 ϕ ,因此对 $P_{i+1,j}$ 的处理方法如下:

$$P_{i,j}(1-\theta) + P_{i+1,j}\theta = P^{air} \Rightarrow (\nabla P)_{i+1/2,j} = \frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{\Delta x} = \frac{P^{air} - P_{i,j}}{\theta \Delta x},$$

$$\theta = |\phi_{i,j}| / (|\phi_{i,j}| + |\phi_{i+1,j}|), P^{air} = k(\nabla \cdot \nabla \phi)_{i,j}(1-\theta) + k(\nabla \cdot \nabla \phi)_{i+1,j}\theta.$$

上式中的 k 为张力系数.本文用以上方法处理 Dirichlet 边界条件的目的是:(1) 使自由界面处压力梯度的离散达到二阶精度^[16];(2) 延伸流场,使流场变量平滑地过渡到非流体域中,提高数值的稳定性.

5 对流项求解及体积误差的修正

前面的内容描述了求解压力项与粘性项的耦合形式,现在来看对流项的求解.鉴于半拉格朗日法^[21]会造成严重的数值耗散,因此本文利用粒子携带的迎风方向的流场信息来求解对流项,从而抑制数值耗散,保留高频细节且维持数值稳定.同时,本文通过计算各单元中心到周围粒子的包围球最短距离来更新 ϕ 函数,形成隐式表面的采样数据.本文将粒子包围球的半径设为 $0.5\Delta x$.最后,本文算法在每个 Δt 的大致流程如下:

- (1) 每个粒子携带一个速度信息 \mathbf{U}_p 且粒子根据速度 \mathbf{U}_F 平流, \mathbf{U}_F 通过当前网格速度场的线性插值来计算;
- (2) 对每个粒子,根据其平流后的位置,通过线性插值将 \mathbf{U}_p 的贡献累加到 \mathbf{U}^* 上;
- (3) 保存网格点的当前速度,记为 $\mathbf{U}_{Advect} = \mathbf{U}^*$,接着添加外力加速度: $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^* + \Delta t \mathbf{f}$;
- (4) 对流域内的所有单元,计算其不同采样点处的流体体积比重 V ,方法同第 4 节所述;
- (5) 按第 4.4 节方法构造线性系统并求解,得到 \mathbf{U}^* 和 \mathbf{P}^* ,计算 $\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^* - \nabla \mathbf{P}^*$.然后对每个网格点,计算速度

场在求解线性系统前后的差值: $\Delta U = U^{n+1} - U_{Advect}$. 然后,将 U^{n+1} 线性外推^[3]至邻近的空气域和固体域;对每个粒子,邻近的网格点将 ΔU 线性插值到粒子位置,插值结果作为 U_p 的增量.

$$U_p = U_p + \Delta U_p^*$$

此外,由于网格分辨率有限,因此从网格插值到粒子时总会有数值误差,那么流体的体积误差也会随之逐渐累积.体积流失现象在模拟低粘性流体和粘性变化很大的流体时比较明显.针对该弊端,本文采用了一种基于几何的数值方法来修正体积误差:在每个求解步开始时,计算当前的流体体积 V_0 、 Δt 时间(或 $n\Delta t, n$ 为正整数且 $n \leq 3$)后,计算流体体积 V_1 与表面积 S_1 ,然后计算 $\Delta\phi = (V_0 - V_1)/S_1$,最后再将 $\Delta\phi$ 加到距离场 ϕ 的每一个采样点上(单元中心)即可.这里,本文用平滑 Heaviside 函数^[17] $H(\phi)$ 和 Heaviside 函数的导数——Dirac-delta 函数来计算流体的体积与表面积.根据文献[17]中第 1.5 节所述, $H(\phi) = \{0|\phi < -1.5\Delta x; 1|\phi > 1.5\Delta x; 0.5 + \phi/3\Delta x + (1/2\pi)\sin(\pi\phi/1.5\Delta x)|-1.5\Delta x < \phi < 1.5\Delta x\}$,而流体的体积与表面积的计算方法为 $V = \sum H(\phi(X))\Delta x^3, S = \sum H'(\phi(X))|\nabla\phi(X)|\Delta x^3$.

6 实验与讨论

本文的实验平台为 Intel 2.83GHz 4 核 CPU, 3GB 内存, NVIDIA Geforce 8800GT 显卡, 开发环境为 Cygwin, 使用的主要函数库为 MATLAB 与 OpenGL, 所有计算程序均使用标准 C++ 编写. 在渲染过程中, 本文用 Marching Cube 算法从隐式表面数据中得到三角化的流体表面, 然后利用渲染器 LuxRender 对三角化表面进行光线跟踪. 对于二维版流体的模拟, 本文用 sprites 来绘制粒子. 在三维情况下, 每个网格单元中生成 8 个粒子, 每个子单元中随机生成一个; 二维情况下每单元生成 4 个粒子. 时间步长 Δt 为 5 倍的 CFL 条件^[1]所限制的步长.

图 4 是对带状黏土坠落于地面的场景模拟, 网格分辨率为 $80 \times 100 \times 64$, 算法约在 4.3s~5.6s 内完成一个时间步的计算. 其中, 求解线性系统的时间百分比约为 63.5%, 而平滑粒子并构建流体表面的时间百分比约为 23.5%, 求解对流项、添加外力加速度、外推速度场的时间占据了剩余的 13%; 而渲染器大约每 90s 完成一帧的渲染. 图 4 左边的 3 帧图中, 模拟的流体粘度较高, $\mu=120$. 从该实例可看到, 流体有明显的弯曲. 这是文献[10]、文献[11]的算法无法模拟的现象, 但文献[10]求解线性系统的总时间比本算法要少 15% 左右, 因为文献[10]采用了简化的加权算法. 图 4 右边的 3 帧图中, 使用了较低的粘性系数: $\mu=15$. 可以看到, 流体弯曲的程度大幅减少, 更像是一种坍塌的现象.

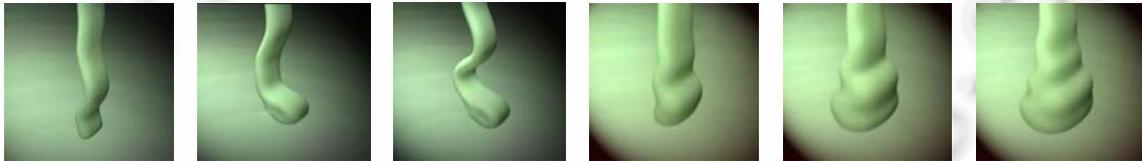


Fig.4 A band of paste falls down onto the ground

图 4 带状的黏土坠落于地面上

图 5 是对柱状胶泥盘绕现象的模拟, 网格分辨率为 $90 \times 60 \times 50, \mu=30$, 每个时间步约耗时 2.3s~3.5s. 这里应用了第 4.5 节所述的二阶 Dirichlet 边界条件, 并计算了表面张力, 张力系数 $k=0.73$. 文献[9, 18]的算法都能实现一定程度的盘绕现象, 但本算法可以模拟形变更自然、细节更丰富的盘绕. 这是因为文献[9]的算法仅使用源项来添加粘弹特性, 而文献[18]的算法将耗散与投影分开求解, 使得最终的速度场不严格满足零应力条件.



Fig.5 A column of colloid coils up

图 5 柱状胶体的盘绕

图6是对乳酪融化现象的模拟.网格分辨率同图5,每个时间步耗时9.2s~10.3s.流体的粘性可变,且最外层的粘性远低于深处的部分.求解线性系统时,MINRES 求解器收敛到 double 精度需要的迭代步数通常在8步~13步左右.在这个实例中,本文测试了第5节的体积修正法.如预期的效果一致,流体可以长时间保持总体积无流失状态.

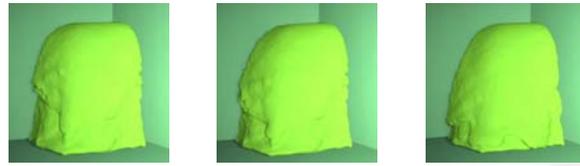


Fig.6 Simulation of cream melting

图6 乳酪融化的模拟

图7给出了熔岩运动的2D实时模拟.网格分辨率为 40×25 , $\mu=40$.帧率为26帧/秒.实验结果显示,本文的算法可以在粗糙的网格上精确地模拟粘性流沿斜坡滚动及沿高曲率固体边界变形的场景.该实例中,速度场可以长时间保持无振荡出现,进一步验证了算法的稳定性.此外,本文特别指出如何处理一个 Δx^3 立方体中同时包含液体、空气与固体的情况,如图8所示.此处计算体积权值时,将空气域看作液体域即可(因为空气中的采样点存储了平滑延伸的流场变量).因此,图8右边单元中的 V 值相当于空气与液体的体积比重之和.如第4.5节所述,压力在自由界面处满足 Dirichlet 条件,这种方法对压力而言不会降低精度;但速度在自由界面处却受 Neumann 条件的约束,会有精度的损失.然而,这种网格单元数量极少,最多形成几条“体素化”的空间曲线,所以并不影响全局的精度.



Fig.7 2D real time simulation of Lava rotating and stretching

图7 熔岩滚落、伸展的2D实时模拟

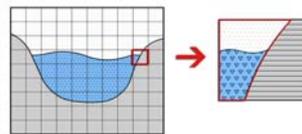


Fig.8 Grid cells containing liquid, air and solid

图8 包含液体、空气与固体的网格单元

7 结束语

本文的主要贡献在于设计了一个等价的能量模型将粘性项与压力项同时求解,使最终的速度场既保持不可压缩性,又满足自由界面处的零应力条件,并自动适应复杂的固体边界.未来的工作主要集中在:

- (1) 利用 GPU 的高并行性来加速粒子平流和矩阵求解;
- (2) 处理多相粘性流的情况以及多相粘性流与运动固体的双向耦合作用.

References:

- [1] Foster N, Metaxas D. Realistic animation of liquids. *Graphical Models and Image Process*, 1996,58(5):471-483. [doi: 10.1006/gmip.1996.0039]
- [2] Stam J. Stable fluids. In: *Proc. of the SIGGRAPH'99*. New York: ACM Press, 1999. 121-128. [doi: 10.1145/311535.311548]

- [3] Enright D, Marschner S, Fedkiw R. Animation and rendering of complex water surfaces. *ACM Trans. on Graphics*, 2002,21(3): 736–744. [doi: 10.1145/566570.566645]
- [4] Müller M, Charypar D, Gross M. Particle-Based fluid simulation for interactive applications. In: *Proc. of the ACM SIGGRAPH/Eurographics: Symp. on Computer Animation*. 2003. 154–159.
- [5] Losasso F, Gibou F, Fedkiw R. Simulating water and smoke with an octree data structure. In: *Proc. of the SIGGRAPH 2004*. New York: ACM Press, 2004. 457–462. [doi: 10.1145/1186562.1015745]
- [6] Klingner BM, Feldman BE, Chentanez N, O'Brien JF. Fluid animation with dynamic meshes. *ACM Trans. on Graphics*, 2006,25(3): 820–825. [doi: 10.1145/1179352.1141961]
- [7] Zhou SZ, Man JJ. Realtime fluid simulation based on multigrid method. *Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics*, 2007,19(7):935–940 (in Chinese with English abstract).
- [8] Liu YQ, Liu XH, Wu EH. Real-Time 3D fluid simulation on GPU with complex obstacles. *Journal of Software*, 2006,17(3): 568–576 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/568.htm> [doi: 10.1360/jos170568]
- [9] Goktekin TG, Bargeil AW, O'Brien JF. A method for animating viscoelastic fluids. *ACM Trans. on Graphics*, 2004,23(3): 463–468. [doi: 10.1145/1186562.1015746]
- [10] Carlson M, Mucha PJ, Van Horn R, Turk G. Melting and flowing. In: *Proc. of the 2002 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symp. on Computer Animation*. 2002. 167–172. [doi: 10.1145/545261.545289]
- [11] Rasmussen N, Enright D, Nguyen D, Marino S, Sumner N, Geiger W, Hoon S, Fedkiw R. Directable photorealistic liquids. In: *Proc. of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symp. on Computer Animation*. 2004. 195–200. [doi: 10.1145/1028523.1028549]
- [12] Hosseini SM, Manzari MT, Hannani SK. A fully explicit three-step SPH algorithm for simulation of non-Newtonian fluid flow. *Int'l Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2007,17(7):715–735. [doi: 10.1108/09615530710777976]
- [13] Bonito A, Picasso M, Laso M. Numerical simulation of 3D viscoelastic flows with free surfaces. *Journal of Computational Physics*, 2006,215:691–716. [doi: 10.1016/j.jcp.2005.11.013]
- [14] Robinson-Mosher A, Shinar T, Gretarsson J, Su J, Fedkiw R. Two-Way coupling of fluids to rigid and deformable solids and shells. *ACM Trans. on Graphics*, 2008,27(3):1–9. [doi: 10.1145/1399504.1360645]
- [15] Choi SC. Iterative methods for singular linear equations and least-squares problems [Ph.D. Thesis]. Stanford University, 2006.
- [16] Foster N, Fedkiw R. Practical animation of liquids. In: *Proc. of the SIGGRAPH 2001*. New York: ACM Press, 2001. 23–30.
- [17] Osher S, Fedkiw R. *Level-Set Methods and Dynamic Implicit Surface*. New York: Springer-Verlag, 2003. 13–16.
- [18] Batty C, Bridson R. Accurate viscous free surfaces for buckling, coiling, and rotating liquids. In: *Proc. of the Eurographics/ACM SIGGRAPH Symp. on Computer Animation*. 2008.1–7.

附中文参考文献:

- [7] 周世哲,满家巨.基于多重网格法的实时流体模拟. *计算机辅助设计与图形学学报*,2007,19(7):935–940.
- [8] 柳有权,刘学慧,吴恩华.基于 GPU 带有复杂边界的三维实时流体模拟. *软件学报*,2006,17(3):568–576. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/568.htm> [doi: 10.1360/jos170568]



杨猛(1983—),男,山东曲阜人,博士,主要研究领域为计算机图形学,数值计算,基于物理的建模与仿真.



刘金刚(1963—),男,博士,研究员,博士生导师,主要研究领域为操作系统设计,智能接口技术,虚拟现实.